

# MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

*M<sub>2</sub>*

Trunchi comun  
+  
curriculum diferențiat

Prefață .....	3
---------------	---

## ELEMENTE DE ALGEBRĂ

<b>Capitolul I. GRUPURI</b> .....	5
<b>1. Legi de compoziție pe o mulțime</b> .....	5
1.1. Definiții și exemple .....	5
1.2. Adunarea și înmulțirea modulo $n$ .....	6
1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo $n$ .....	7
1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă .....	8
1.5. Tabla unei legi de compoziție .....	10
<b>2. Proprietăți ale legilor de compoziție</b> .....	14
2.1. Proprietatea de comutativitate .....	14
2.2. Proprietatea de asociativitate .....	15
2.3. Element neutru .....	21
2.4. Elemente simetrizabile .....	23
<b>3. Noțiunea de grup. Exemple</b> .....	30
3.1. Grupul aditiv al resturilor modulo $n$ .....	32
3.2. Grupul claselor de resturi modulo $n$ .....	33
3.3. Grupul permutărilor unei mulțimi .....	36
3.4. Grupul simetric $S_n$ .....	37
3.5. Grupuri de matrice .....	39
<b>4. Reguli de calcul într-un grup</b> .....	44
4.1. Puterea unui element într-un grup .....	44
4.2. Legi de simplificare .....	45
<b>5. Morfisme de grupuri</b> .....	50
<b>Capitolul II. INELE ȘI CORPURI</b> .....	60
<b>1. Definiții și exemple</b> .....	60
1.1. Inelul claselor de resturi modulo $n$ .....	61
1.2. Inele de matrice pătratice .....	62
1.3. Inele de funcții reale .....	65
<b>2. Reguli de calcul într-un inel</b> .....	69
<b>3. Corpuri</b> .....	75
<b>Capitolul III. INELE DE POLINOAME</b> .....	81
<b>1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp comutativ</b> .....	81
1.1. Șiruri finite de elemente din corpul $K$ .....	81
1.2. Operații cu șiruri de elemente din corpul $K$ .....	81
<b>2. Forma algebrică a polinoamelor</b> .....	83
2.1. Polinoame constante .....	83
2.2. Forma algebrică a unui polinom .....	84
2.3. Valoarea unui polinom. Funcții polinomiale .....	86

<b>3. Operații cu polinoame scrise sub formă algebrică</b> .....	88
3.1. Adunarea și înmulțirea polinoamelor scrise sub formă algebrică .....	88
3.2. Împărțirea polinoamelor .....	92
3.3. Împărțirea la $X - a$ Schema lui Horner .....	97
<b>4. Divizibilitatea polinoamelor</b> .....	102
4.1. Relația de divizibilitate pe mulțimea $K[X]$ .....	102
4.2. Proprietăți ale relației de divizibilitate .....	102
4.3. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor .....	105
<b>5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili</b> .....	112
5.1. Rădăcini ale polinoamelor .....	112
5.2. Rădăcini multiple ale unui polinom .....	114
5.3. Ecuații algebrice .....	115
5.4. Polinoame ireductibile în $K[X]$ .....	117
5.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili .....	118
<b>6. Relațiile lui Viète</b> .....	124
<b>7. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în <math>\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}</math></b> .....	130
7.1. Ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbf{Z}$ .....	130
7.2. Ecuații algebrice cu coeficienți raționali .....	134
7.3. Ecuații algebrice cu coeficienți reali .....	136
<b>8. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior cu coeficienți în <math>\mathbf{C}</math></b> .....	139
8.1. Ecuații bipătrate .....	139
8.2. Ecuații binome .....	140
8.3. Ecuații reciproce .....	141

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

<b>Capitolul I. Primitive</b> .....	148
<b>1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală</b> .....	148
<b>2. Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue</b> .....	150
<b>3. Proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite</b> .....	153
<b>4. Primitive uzuale</b> .....	159
4.1. Primitive deduse din derivatele funcțiilor elementare .....	159
4.2. Primitive deduse din derivarea funcțiilor compuse .....	162
4.3. Primitive deduse din formula de derivare a produsului a două funcții .....	164
<b>Capitolul II. Integrala definită</b> .....	169
<b>1. Definierea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula lui Leibniz-Newton</b> .....	169
<b>2. Proprietăți ale integralei definite</b> .....	173
2.1. Proprietatea de liniaritate a integralei definite .....	173
2.2. Proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare .....	174
2.3. Proprietatea de monotonie a integralei definite .....	176
<b>3. Metode de calcul al integralelor definite</b> .....	182
3.1. Metoda de integrare prin părți .....	182
3.2. Metode de integrare prin schimbare de variabilă .....	188
3.2.1. Prima metodă de schimbare de variabilă .....	188
3.2.2. A doua metodă de schimbare de variabilă .....	196

4. Calculul integralelor de forma  $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{grad}(Q) \leq 4$  prin metoda

descompunerii în funcții raționale simple ..... 200

4.1. Calculul integralei definite a unei funcții raționale simple ..... 201

4.2. Calculul integralei definite a unei funcții raționale oarecare ..... 212

Capitolul III. Aplicații ale integralei definite ..... 221

1. Aria unei suprafețe plane ..... 221

1.1. Aria subgraficului unei funcții ..... 221

1.2. Calculul ariei mulțimii  $\Gamma_f$  cu ajutorul integralei definite ..... 222

1.3. Aria suprafețelor plane cuprinse între două curbe ..... 225

2. Volumul unui corp de rotație ..... 229

TEME DE SINTEZĂ ..... 234

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI ..... 250

## I. GRUPURI

### 1 Legi de compoziție pe o mulțime

#### 1.1. Definiții și exemple

Din studiul diferitelor operații întâlnite până acum (adunarea și înmulțirea numerelor, compunerea funcțiilor, adunarea și înmulțirea matricelor etc.) se pot desprinde concluziile:

– există o mare diversitate atât în ceea ce privește natura mulțimilor pe care sunt definite aceste operații (numere, funcții, matrice, vectori, șiruri, perechi ordonate...), cât și în ceea ce privește regulile specifice după care se operează cu elementele acestor mulțimi;

– operațiile algebrice întâlnite au o serie de proprietăți comune, indiferent de natura elementelor asupra cărora operează (comutativitate, asociativitate etc.).

Reținând aspectele esențiale ale operațiilor, în acest capitol se va face o prezentare a acestora într-o formă generală prin intermediul conceptului de lege de compoziție, concept care dă posibilitatea folosirii metodei axiomatice în algebră.

#### ❖ DEFINIȚII

Fie  $M$  o mulțime nevidă.

- O aplicație  $\circ : M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \rightarrow \circ(x, y)$  se numește **lege de compoziție** (operație algebrică) pe mulțimea  $M$ .
- Elementul  $\circ(x, y) \in M$ , care corespunde prin aplicația  $\circ$  perechii ordonate  $(x, y) \in M \times M$  se numește **compusul** lui  $x$  cu  $y$  prin legea de compoziție  $\circ$ .

#### 👁 Exemple de legi de compoziție

♦ Operația de adunare „+” și operația de înmulțire „·” pe mulțimile de numere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ .

„+”:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \rightarrow x + y$ ,

„·”:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ ,

„+”:  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \rightarrow x + y$ ,

„·”:  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ , etc.

• Operația de adunare „+” pe mulțimea  $\mathcal{V}$  a vectorilor din plan:  
 „+”:  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, (\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$ .

• Operațiile de reuniune „ $\cup$ ”, intersecție „ $\cap$ ”, diferență „ $\setminus$ ”, diferență simetrică „ $\Delta$ ”, pe mulțimea  $\mathcal{P}(M)$  a părților (submulțimilor) unei mulțimi  $M$ :

„ $\cup$ ”:  $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow A \cup B$ ,

„ $\cap$ ”:  $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M), (A, B) \rightarrow A \cap B$ , etc.

• Operația de compunere „ $\circ$ ” a funcțiilor pe mulțimea  $\mathcal{F}(M) = \{f \mid f: M \rightarrow M\}$ :

„ $\circ$ ”:  $\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (f, g) \rightarrow f \circ g$ .

Legile de compoziție sunt date în diferite notații:

• În notație aditivă se scrie  $\circ(x, y) = x + y$ ; elementul  $x + y \in M$  se numește **suma** lui  $x$  cu  $y$ , iar operația  $\circ$  se numește **adunare**.

• În notație multiplicativă se scrie  $\circ(x, y) = x \cdot y$ ; elementul  $x \cdot y \in M$  se numește **produsul** lui  $x$  cu  $y$ , iar operația  $\circ$  se numește **înmulțire**.

Descori, dacă  $\circ: M \times M \rightarrow M$  este o lege de compoziție (operație algebrică) pe mulțimea  $M$ , în loc de notația  $\circ(x, y)$  se folosesc notațiile:  $x \circ y, x \circ y, x * y, x \uparrow y, x \downarrow y$  etc.

### Problemă rezolvată

☒ Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește operația algebrică „ $\bar{\cdot}$ ”, astfel:

$\bar{\cdot}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \bar{\cdot} y = xy - x - y$ .

a) Să se calculeze:  $2 \bar{\cdot} 3, 5 \bar{\cdot} (-3), (-6) \bar{\cdot} (-8)$ .

b) Pentru care elemente  $x \in \mathbb{R}$ , avem  $x \bar{\cdot} 2 = 8$ ?

c) Să se rezolve ecuația  $x \bar{\cdot} (x+1) = 1$ .

### Soluție

a)  $2 \bar{\cdot} 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1$ ;  $5 \bar{\cdot} (-3) = 5 \cdot (-3) - 5 - (-3) = -17$ , iar  $(-6) \bar{\cdot} (-8) = (-6) \cdot (-8) - (-6) - (-8) = 62$ .

b) Avem:  $x \bar{\cdot} 2 = x \cdot 2 - x - 2 = x - 2$ . Din egalitatea  $x - 2 = 8$  se obține  $x = 10$ .

c) Avem:  $x \bar{\cdot} (x+1) = x(x+1) - x - (x+1) = x^2 - x - 1$ . Rezultă ecuația  $x^2 - x - 2 = 0$  cu soluțiile  $x_1 = -1, x_2 = 2$ . Așadar:  $(-1) \bar{\cdot} 0 = 1$  și  $2 \bar{\cdot} 3 = 1$ .

## 1.2. Adunarea și înmulțirea modulo $n$

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  un număr natural și  $a \in \mathbb{Z}$ . Din teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi rezultă că există și sunt unice numerele  $q \in \mathbb{Z}$  și  $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  cu proprietatea că  $a = nq + r$ .

Numărul natural  $r$  care reprezintă restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ , se notează  **$a \bmod n$**  (se citește „ $a$  modulo  $n$ ”) și se numește **redusul modulo  $n$**  al numărului „ $a$ ”.

Așadar,  $r = a \bmod n$ .

Astfel, dacă  $n = 6$ , atunci:

$$15 \bmod 6 = 3, \quad 5 \bmod 6 = 5, \quad (-10) \bmod 6 = 2.$$

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  definim următoarele legi de compoziție:

a)  $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $a \oplus b = (a + b) \bmod n$ , numită **adunarea modulo  $n$** .

$a \oplus b$  se numește **suma modulo  $n$**  a lui  $a$  cu  $b$ .

b)  $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $a \odot b = (ab) \bmod n$ , numită **înmulțirea modulo  $n$** .

$a \odot b$  se numește **produsul modulo  $n$**  al lui  $a$  cu  $b$ .

Astfel, pentru  $n = 8$ , avem:

$$6 \oplus 10 = (6 + 10) \bmod 8 = 16 \bmod 8 = 0;$$

$$7 \oplus 12 = (7 + 12) \bmod 8 = 19 \bmod 8 = 3;$$

$$4 \odot 3 = (4 \cdot 3) \bmod 8 = 12 \bmod 8 = 4;$$

$$(-2) \odot 5 = (-2) \cdot 5 \bmod 8 = (-10) \bmod 8 = 6.$$

#### □ TEMĂ

Pentru  $n = 6$  calculați:

$$2 \oplus 5, \quad 2 \odot 5,$$

$$16 \oplus 9, \quad 9 \odot 4,$$

$$(-2) \oplus 3, \quad (-5) \odot 5,$$

$$(-7) \oplus (-9), \quad (-9) \odot (-5),$$

$$(2 \oplus 9) \odot 3, \quad (3 \odot 7) \oplus 8.$$

### 1.3. Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo $n$

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  un număr natural fixat. Pentru  $a \in \mathbb{Z}$  notăm  $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$  și  $r = a \bmod n$  restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ .

Din teorema împărțirii cu rest, există  $q \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = nq + r$ .

Atunci,  $\hat{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nq + nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{r + nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = \hat{r}$ .

Așadar, în determinarea mulțimii  $\hat{a}$  este esențial să cunoaștem restul împărțirii lui  $a$  la  $n$ .

Mulțimea  $\hat{a}$  se numește **clasa de resturi modulo  $n$**  a lui  $a$ .

Deoarece resturile obținute la împărțirea cu  $n$  a numerelor întregi pot fi  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , rezultă că există numai  $n$  clase de resturi modulo  $n$  distincte două câte două și acestea pot fi considerate  $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}$ .

Mulțimea claselor de resturi modulo  $n$  se notează cu  $\mathbb{Z}_n$  și putem scrie  $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ .

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}_n$  se definesc următoarele legi de compoziție:

a) „+“:  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b}$ , numită **adunarea claselor de resturi modulo  $n$** , iar  $\hat{a} + \hat{b}$  se numește **suma** claselor  $\hat{a}$  și  $\hat{b}$ .

b) „ $\cdot$ “:  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$ , numită **înmulțirea claselor de resturi modulo  $n$** , iar  $\hat{a} \cdot \hat{b}$  se numește **produsul** claselor  $\hat{a}$  și  $\hat{b}$ .

### Exemple

• Fie  $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ . Atunci, avem:  $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$ ;  $\hat{2} + \hat{3} = \hat{1}$ ;  $\hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$  etc.

De asemenea:  $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$ ;  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2}$ ;  $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ .

• În  $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$  avem:  $\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$ ,  $\hat{2} + \hat{3} = \hat{0}$ ,  $\hat{2} + \hat{2} = \hat{4}$ ,  $\hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$  etc.

De asemenea:  $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4}$ ,  $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{1}$ ,  $\hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{4}$ ,  $\hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{2}$  etc.

### Exerciții rezolvate

☒ 1. Să se calculeze în  $\mathbb{Z}_7$ :

a)  $(\hat{2})^3$ ; b)  $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6}$ ; c)  $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3$ .

#### Soluție

Avem: a)  $(\hat{2})^3 = \hat{2} \cdot \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{1}$ ; b)  $(\hat{3} \cdot \hat{4}) \cdot \hat{6} = \hat{5} \cdot \hat{6} = \hat{2}$ ;

c)  $(\hat{3})^4 + (\hat{5})^3 = \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{5} \cdot \hat{5} \cdot \hat{5} = \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{3} + \hat{4} \cdot \hat{5} = \hat{6} \cdot \hat{3} + \hat{6} = \hat{4} + \hat{6} = \hat{3}$ .

☒ 2. Să se rezolve în  $\mathbb{Z}_4$  ecuația  $\hat{2}x^2 + \hat{2}x = \hat{0}$ .

#### Soluție

Soluțiile ecuației pot fi doar elemente ale mulțimii  $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ .

Fie  $f(x) = \hat{2}x^2 + \hat{2}x$ . Avem:

•  $f(\hat{0}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ ;

•  $f(\hat{1}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ ;

•  $f(\hat{2}) = \hat{2} \cdot \hat{0} + \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ ;

•  $f(\hat{3}) = \hat{2} \cdot \hat{1} + \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$ .

În concluzie, soluțiile ecuației date sunt  $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ . După cum se observă ecuațiile de gradul 2, pe mulțimi diferite de cele uzuale, pot avea mai mult de două soluții.

## 1.4. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Fie  $M$  o mulțime nevidă și „ $\circ$ “:  $M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție pe  $M$ .

### DEFINIȚIE

• O submulțime  $S \subset M$  se numește **parte stabilă** a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ “ dacă  $\forall x, y \in S$  implică  $x \circ y \in S$ .

Pentru cazul  $S = M$  se spune că  $M$  este parte stabilă în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

### Exemple

- Multimile de numere  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația de adunare și operația de înmulțire a numerelor reale.
- Multimile  $p\mathbb{N} = \{px \mid x \in \mathbb{N}\}$ , cu  $p \in \mathbb{N}$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{N}$  în raport cu operațiile de adunare și de înmulțire a numerelor naturale.
- Fie  $M_n(\mathbb{C})$  mulțimea matricelor pătrate cu elemente din mulțimea  $\mathbb{C}$ . Submulțimea  $S \subset M_n(\mathbb{C})$  a matricelor inversabile este parte stabilă a lui  $M_n(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

### Exerciții rezolvate

- ☒ 1. Fie  $H \subset M_2(\mathbb{C})$ ,  $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$ . Să se arate că  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $M_2(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea matricelor.

#### Soluție

Fie  $A, B \in H$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$  și  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ . Se

$$\text{obține: } AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & -by + ax \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Folosind proprietatea  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  rezultă că:

$$\det(AB) = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1 \text{ și astfel } (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că  $AB \in H$ , deci  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $M_2(\mathbb{C})$  în raport cu înmulțirea.

- ☒ 2. Să se arate că mulțimea  $\mathcal{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu adunarea modulo  $n$  și înmulțirea modulo  $n$ .

#### Soluție

Dacă  $a, b \in \mathcal{R}_n$ , atunci, din definiție,  $a \oplus b$  și  $a \odot b$  reprezintă restul împărțirii numerelor  $a + b$  și  $a \cdot b$  la  $n$ . În concluzie,  $a \oplus b$  și  $a \odot b$  sunt elemente ale lui  $\mathcal{R}_n$ .

Dacă  $H$  este parte stabilă a lui  $M$  în raport cu legea de compoziție  $\circ : M \times M \rightarrow M$ , atunci pe mulțimea  $H$  se poate defini o lege de compoziție  $\cup : H \times H \rightarrow H$ , considerând  $\cup(x, y) = \circ(x, y)$ ,  $\forall x, y \in H$ .

Legea de compoziție  $\psi$  se numește **legea de compoziție indusă** pe mulțimea  $H$  de către legea de compoziție  $\phi$ .

Pentru simplificarea scrierii, se obișnuiește să se folosească aceeași notație pentru legea de compoziție pe  $M$  și legea de compoziție indusă pe  $H$ .

## 1.5. Tabla unei legi de compoziție

Fie  $M$  o mulțime finită,  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  și  $\phi : M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție pe  $M$ .

Legea de compoziție  $\phi$  poate fi descrisă printr-un tablou cu  $n$  linii și  $n$  coloane corespunzător elementelor  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . La intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$  se află elementul  $\phi(a_i, a_j)$ .

Acest tablou se numește **tabla legii de compoziție** sau **tabla lui Cayley**.

Tabla unei legi de compoziție are un rol deosebit în perfecționarea calculului algebrice, precum și în verificarea unor proprietăți ale acesteia.

$\phi$	$a_1$	$a_2$	...	$a_j$	...	$a_n$
$a_1$				$\vdots$		
$a_2$				$\vdots$		
$\vdots$				$\vdots$		
$a_i$	...	...	...	$\phi(a_i, a_j)$	...	...
$\vdots$				$\vdots$		
$a_n$				$\vdots$		

### Exerciții rezolvabile

- ☒ 1. Fie  $H = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$ . Să se arate că  $H$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

#### Soluție

Ecuția  $z^4 = 1$  se scrie  $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ ,

de unde se obține  $z \in \{-1, 1, i, -i\} = H$ . Alcătuiim tabla operației de înmulțire pe  $H$ .

După cum se observă din tabla operației, toate rezultatele obținute în urma compunerii elementelor aparțin mulțimii  $H$ . În concluzie, mulțimea  $H$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea.

	$-1$	$1$	$-i$	$i$
$-1$	$1$	$-1$	$i$	$-i$
$1$	$-1$	$1$	$-i$	$i$
$-i$	$i$	$-i$	$-1$	$1$
$i$	$-i$	$i$	$1$	$-1$

- ☒ 2. Să se alcătuiască tablele operațiilor de adunare și de înmulțire modulo 4 pe  $\mathcal{R}_4$  și de adunare și de înmulțire pe mulțimea claselor de resturi  $\mathbb{Z}_4$ .

Soluție

Având în vedere modul în care s-au definit operațiile pe mulțimile  $\mathcal{R}_4$  și  $\mathcal{I}_4$  avem:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

- ☒ **3.** Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy + x + y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . Să se arate că mulțimea  $M = [-2, 0]$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.

Soluție

Trebuie arătat că dacă  $x, y \in [-2, 0]$ , atunci  $x \circ y \in [-2, 0]$ . Deoarece  $x, y \in [-2, 0]$ , rezultă că  $-2 \leq x \leq 0$ ,  $-2 \leq y \leq 0$  sau  $-1 \leq x - 1 < 1$ ,  $-1 \leq y + 1 \leq 1$  și se obțin inegalitățile:  $|x + 1| \leq 1$ ,  $|y + 1| \leq 1$ . Prin înmulțire avem inegalitatea:  $|(x + 1)(y + 1)| \leq 1$ , care se scrie sub forma  $-1 \leq (x + 1)(y + 1) \leq 1$ . După reduceri se obține:  $-2 \leq xy + x + y \leq 0$ , deci  $x \circ y \in [-2, 0]$ .

## EXERCIȚII ȘI PROBLEME

## EXERSARE

**E1.** Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește operația algebrică „ $\circ$ ” astfel:  $x \circ y = 2x + y - 3$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .

a) Să se calculeze:  $4 \circ 7$ ,  $8 \circ (-1)$ ,  $(-8) \circ 3$  și  $3 \circ (-8)$ .

b) Să se afle valorile  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care  $x \circ (3x - 1) = 6$ .

c) Să se rezolve ecuația  $(x + 1) \circ 3 = 5 \circ (x^2 - 8)$ .

**E2.** Pe mulțimea  $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$

definim operația algebrică  $A \perp B = 3A - 2B$ ,  $\forall A, B \in \mathcal{M}$ .

a) Să se arate că  $I_2 \in \mathcal{M}$ .

b) Să se calculeze  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

c) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , știind că

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

E3. Să se calculeze:

- a)  $18 \bmod 5$ ;  $28 \bmod 6$ ;  $17 \bmod 8$ ;  
 $(-3) \bmod 4$ ;  
 b)  $5 \oplus 4$ ;  $6 \oplus 11$ ;  $(-2) \oplus 5$ ;  $(-4) \oplus$   
 $\oplus (-13)$ , dacă  $n = 9$ ;  
 c)  $2 \odot 7$ ;  $5 \odot 8$ ;  $(-3) \odot 17$ ;  $(-5) \odot$   
 $\odot (-11)$ , dacă  $n = 10$ .

E4. Să se calculeze:

- a)  $\widehat{23}$ ,  $\widehat{21}$ ,  $\widehat{9}$ ,  $\widehat{-3}$ ,  $\widehat{-7}$  în  $\mathbf{Z}_3$ ;  
 b)  $\widehat{2} + \widehat{11}$ ,  $\widehat{3} + \widehat{7}$ ,  $\widehat{5} + \widehat{9}$  în  $\mathbf{Z}_4$ ;  
 c)  $\widehat{2} \cdot \widehat{4}$ ,  $\widehat{4} \cdot \widehat{3}$ ,  $(\widehat{3})^3$ ,  $(\widehat{5})^4$  în  $\mathbf{Z}_6$ ;  
 d)  $(\widehat{2} + \widehat{3}) \cdot (\widehat{4} + \widehat{5}) \cdot (\widehat{3} + \widehat{6})$  în  $\mathbf{Z}_7$ .

E5. Să se rezolve ecuațiile:

- a)  $\widehat{2x} + \widehat{1} = \widehat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_3$ ;  
 b)  $\widehat{x^2} + \widehat{1} = \widehat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_5$ ;  
 c)  $\widehat{3x^2} - \widehat{x} + \widehat{2} = \widehat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_4$ ;  
 d)  $\widehat{x^3} + \widehat{2x} + \widehat{3} = \widehat{0}$ , în  $\mathbf{Z}_5$ .

E6. Pe mulțimea  $\mathbf{R}$  se definesc operațiile algebrice:  $x \circ y = x + y - xy$  și  $x \top y = x - y + 2xy$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ . Să se rezolve:

- a) ecuația  $x \circ x = x \top x$ ;  
 b) sistemul 
$$\begin{cases} (x + 3y) \circ 3 = -19 \\ (x - 2y) \top 2 = -22 \end{cases}$$

E7. Pe mulțimea  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  se consideră legea de compoziție  $x \circ y = |x - y|$ ,  $\forall x, y \in M$ . Să se alcătuiască tabla operației și să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu această lege de compoziție.

E8. Să se alcătuiască tabla operației „ $\circ$ ” pe mulțimea  $M$  și să se studieze dacă mulțimea este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”, dacă:

- a)  $M = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide } 12\}$ ,  
 $x \circ y = \text{c.m.m.d.c.}(x, y)$ ;  
 b)  $M = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  
 $x \circ y = \min(x, y)$ ;

- c)  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  
 $x \circ y = \max(x, y)$ .

E9. Să se arate că mulțimea  $M$  este parte stabilă în raport cu legea de compoziție specificată:

- a)  $M = [2, +\infty)$ ,  $x \circ y = xy - 2(x + y) + 6$ ;

- b)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$ , în raport cu adunarea matricelor;

- c)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$ , în raport cu înmulțirea matricelor.

E10. Pe mulțimea  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  se consideră operația algebrică „ $\circ$ ” a cărei tablă este dată mai jos:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	3	4	1
2	1	3	4	2
3	2	1	3	4
4	4	3	2	1

- a) Să se determine:  $x = 1 \circ (2 \circ 3)$ ,  
 $y = 4 \circ (3 \circ 2)$ ,  $z = (1 \circ 2) \circ (3 \circ 4)$ .

- b) Să se rezolve ecuațiile:  $x \circ 2 = 4$ ,  
 $4 \circ x = 2$  și  $x \circ 2 \circ x = 1$ .

- c) Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} x \circ 2 = y \\ y \circ 2 = x \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x \circ y = 1 \\ (x + 1) \circ y = 1 \end{cases}$$

E11. Fie  $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{C} \right\}$  și le-

gea de compoziție  $X \perp Y = X + Y - I_2$ ,  
 $\forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ , definită pe mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ .

Să se arate că mulțimea  $\mathcal{M}$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$  în raport cu operația de înmulțire a matricelor și în raport cu operația „ $\perp$ ”.

- A1. Să se determine mulțimile  $M \subset \mathbb{Z}_4$ , care sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{Z}_4$  în raport cu operația de adunare.
- A2. Să se arate că mulțimea  $M$  este parte stabilă în raport cu operația specificată:
- a)  $M = (a, +\infty)$ ,  $x \circ y = xy - a(x+y) + a^2 + a$ ;
- b)  $M = [4, 6]$ ,  $x \circ y = xy - 5(x+y) + 30$ ;
- c)  $M = (-1, 1)$ ,  $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$ .
- A3. Pe mulțimea  $M = (2, +\infty)$  se consideră legea de compoziție:
- $$x \circ y = \frac{xy - 2}{x + y - 3}, \quad \forall x, y \in M.$$
- Să se arate că  $M$  este parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.
- A4. Se consideră mulțimea
- $$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$
- Să se arate că:
- a) mulțimea  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea;
- b) mulțimea  $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  în raport cu înmulțirea.
- A5. Fie funcțiile  $f_1, f_2, f_3, f_4: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ,
- $$f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$
- Să se arate că mulțimea  $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.
- A6. Fie  $M = (2, +\infty)$  și legea de compoziție pe  $M$ ,  $x \circ y = xy - 2x - 2y + a$ ,  $\forall x, y \in M$ .
- a) Să se determine valoarea minimă a lui  $a \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $M$  să fie parte stabilă în raport cu „ $\circ$ ”.
- b) Să se rezolve ecuația  $4 \circ x = 8$ .
- c) Să se rezolve sistemul:
- $$\begin{cases} (x+2) \circ (y-3) = 46 \\ (2x+1) \circ (y+1) = 59 \end{cases}, \text{ pentru } a = 50.$$
- A7. Să se studieze dacă mulțimea  $M$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{C}$  în raport cu înmulțirea:
- a)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$ ;
- b)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$ ;
- c)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = \bar{z}\}$ ;
- d)  $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ .
- A8. Să se determine mulțimile finite  $M \subset \mathbb{R}$ , care sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu operația de înmulțire. Aceeași problemă pentru mulțimea  $\mathbb{C}$ .
- A9. Fie  $M$  o mulțime cu 3 elemente. Să se determine numărul legilor de compoziție care se pot defini pe mulțimea  $M$ . Generalizare.